组合数学笔记 (马杰 2022 暑期在线课)

Huarui ZHOU

2022 年 9 月 28 日

目录

这部分是我记的中科大马杰老师 2022 年 YMSC 暑期课程笔记, 有些地方整理的不是很完善.

1 Lecture 1: Basic counting

1.1 二项式系数

定义 1.1. 定义一些基础的记号.

- 定义 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$.
- 设 X 是一个集合, $\#X = |X|$ 表示 X 中元素的个数
- $2^X = \{A \subset X\}$
- 设 $|X| = n$, 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \leq n$, 定义
$$\binom{X}{k} = \{A \subset X : |A| = k\}.$$
- 定义 $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

命题 1.2. X 是一个集合, $|X| = n$, 设 $k \in [n] \cup \{0\}$, 则
$$\binom{|X|}{k} = \left|\binom{X}{k}\right| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

命题 1.3. 设 $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leq n$,

(1)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(2)
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

命题 1.4. 设 $n, k \in \mathbb{Z}_+$, 方程
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

整数解的个数为 $\binom{n}{k}$.

命题 1.5. 设 $n, k \in \mathbb{Z}_+$, 方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$$

整数解的个数为 $\binom{k-1}{n-1}$.

证明. 考虑有 k 个小球, 中间共有 $k-1$ 个空隙, 在这些空隙中插入 $n-1$ 个木板, 就可以将其分成 n 组, 每一种插板的方法对应一组解, 因此解的个数为

$$\binom{k-1}{n-1}.$$

□

命题 1.6. 设 $n, k \in \mathbb{Z}_+$, 方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

整数解的个数为 $\binom{n+k-1}{n-1}$.

证明. 令 $y_i = x_i + 1$, 则这个问题转化为了求

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k + n, \quad y_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1},$$

整数解的个数, 由上一个命题得整数解个数为

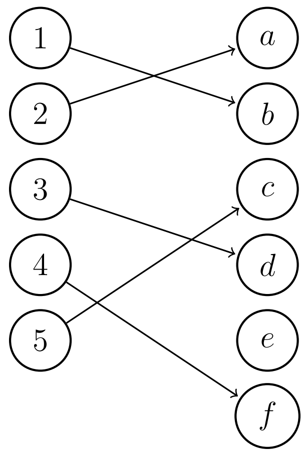
$$\binom{n+k-1}{n-1}.$$

□

1.2 计数函数 (counting function)

定义 1.7. 令 X^Y 是所有 $f : Y \to X$ 构成的集合, 则 $|X^Y| = |X|^{|Y|}$.

命题 1.8. 设 $r, n \in \mathbb{Z}_+$, $r \leq n$, 则单射 $f : [r] \to [n]$ 的个数是 $(n)_r$.

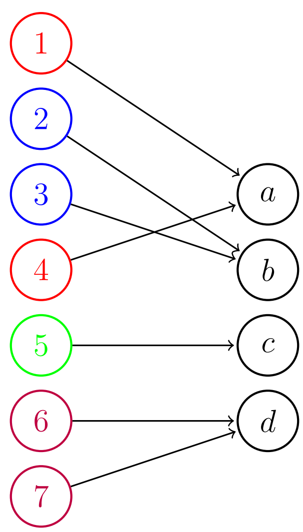


证明. 由单射的定义, 相当于是从 $[n]$ 中选出 r 个元素与 $[r]$ 中每个元素对应, 由于要记次序, 因此是 n 中选出 r 个元素进行排列. □

定义 1.9 (Stirling number of the second kind)**.** 令 $S(r,n)$ 是将 $[r]$ 划分成 n 个 *(不计次序)* 非空集合的分法个数.

命题 1.10. 设 $n, r \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq n$, 则满射 $f : [r] \to [n]$ 的个数是 $S(r,n) \cdot n!$

证明. 由满射定义, 将 $[r]$ 划分成 n 个非空集合的不计次序的分法有 $S(r,n)$ 种, 再乘上 $[n]$ 中元素的全排列 $n!$ 即得所有满射 f 的个数.



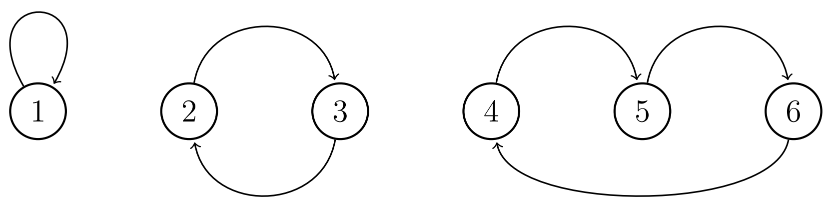
□

定义 1.11. 称映射 $f : X \to X$ 是置换 *(permutation)*, 如果 f 是单射 *(或者是满射, 这两个条件等价)*.

例 1. $X=[6]$, 定义置换如下

$$1\to 1,\ 2\to 3,\ 3\to 2,\ 4\to 5,\ 5\to 6\,,6\to 4,$$

可以将其表示为以下形式



注意到置换可以表示为不同的循环 *(cycle).*

定义 1.12 (Stirling number of the first kind)**.** 令 $s(r,n)$ 是将 $[r]$ 用 n 个循环划分的分法个数再乘上 $(-1)^{n-r}$.

1.3 二项式定理

令 $f(x)$ 是一个多项式, $[x^k]f$ 是多项式 $f(x)$ 中 x^k 的系数.

命题 1.13. 令 I_j 是非负整数构成的集合, $j\in[n]$, 令

$$f_j(x)=\sum_{i_j\in I_j}x^{i_j},\ j\in[n],$$

令

$$f(x)=\prod_{j=1}^{n}f_j(x),$$

则

$$[x^k]f=\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=k\\ i_j\geq 0}}1.$$

命题 1.14. 令 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是一列多项式, 令

$$f=f_1f_2\cdots f_n,$$

则

$$[x^k]f = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=k \\ i_j\geq 0}} \left(\prod_{j=1}^{n}[x^{i_j}]f_j\right).$$

定理 1.15 (二项式定理)**.** 设 $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 则

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

证明. 由命题 1.13 可得. □

定理 1.16 (Vandermond's convolution formula)**.**

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} \binom{n}{i}\binom{m}{j}.$$

证明. 定义

$$f(x) = (1+x)^n, \quad g(x) = (1+x)^m,$$

则

$$[x^k]fg = \sum_{\substack{i+j=k, \\ i,j\geq 0}} ([x^i]f \cdot [x^j]g) = \sum_{\substack{i+j=k, \\ i,j\geq 0}} \binom{n}{i}\binom{m}{j}.$$ □

1.4 容斥原理 (Inclusion and exclusion principle, IEP)

令 Ω 是一个集合 (ground set),$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 Ω 的子集, 记补集为

$$A_i^C = \Omega \setminus A_i = \overline{A_i}.$$

那么我们想知道

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$$

的值是多少.

定义 1.17. 令 $A_\varnothing = \Omega$, 对于非空集合 $I \subset [n]$, 令

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

对 $k \geq 0$, 令

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I|=k}} |A_I|.$$

定理 1.18 (Inclusion and exclusion principle)**.**

$$|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = \sum_{I \subset [n]} (-1)^{|I|} |A_I|.$$

定义 1.19. 设 $X \subset \Omega$, 定义其特征函数 $\mathbb{1}_X : \Omega \to \{0, 1\}$ 为

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}$$

证明. (定理 1.18)

令 $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 断言

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i})(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{1}$$

如果 $x \notin A$, 则 $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{A_i}(x) = 0$; 如果对某个 i 有 $x \in A_i$, 则 $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i})(x) = 1 - 1 = 0$. 注意到

$$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{A_i} = \mathbb{1}_{A \cap A_i} = \mathbb{1}_{A_i}, \quad \mathbb{1}_A^n = \mathbb{1}_A$$

将式子 1 展开即得

$$0 = \mathbb{1}_A + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{I \subset [n], |I|=k} \mathbb{1}_{A_I},$$

从而

$$\mathbb{1}_A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [n], |I|=k} \mathbb{1}_{A_I}, \tag{2}$$

注意到

$$|A| = \sum_{x \in A} \mathbb{1}_A(x),$$

我们对式子 2 取遍所有 $x \in \Omega$ 得到

$$\sum_{x\in\Omega} \mathbb{1}_A(x) = \sum_{x\in\Omega}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\subset[n],|I|=k}\mathbb{1}_{A_I}(x),$$

从而有

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\subset[n],|I|=k}|A_I|.$$

写成另一种形式有

$$|\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i| = |\Omega| - |A| = |A_\varnothing| - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k.$$

□

例 2. 回忆 $S(r,n)$ 是将 $[r]$ 划分成 n 个 *(不计次序)* 非空集合的分法个数, $S(n,k)\cdot k!$ 是满射 $f:[n]\to[k]$ 的个数, 则 $S(n,k)$ 的表达式为

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

证明. 令 $\Omega = \{f:[n]\to[k]\}$,$A_i = \{f:[n]\to[k]\setminus\{i\}\}$, $i\in[k]$. 于是所有非满射的函数 $f:[n]\to[k]$ 构成的集合为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k,$$

所有满射函数构成的集合为

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}.$$

由容斥原理得

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}| = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i S_i,$$

其中

$$S_i = \sum_{\substack{I\subset[k]\\|I|=i}}|A_I|,$$

注意

$$A_I = \bigcap_{j\in I}A_j = \{f:[n]\to[k]\setminus I\},$$

当 $|I| = i$ 时, 每一个 $[n]$ 中的元素在 $[k] \setminus I$ 中的对象都有 $k - i$ 种选择, 于是

$$|A_I| = (k-i)^n,$$

从而

$$S_i = \binom{k}{i}(k-i)^n,$$

$$\#\{f : [n] \to [k], surjective\} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^k \binom{k}{i}(k-i)^n,$$

$$S(n,k) = \frac{\#\{f : [n] \to [k], surjective\}}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^k \binom{k}{i}(k-i)^n.$$

□

Euler function

下面来看容斥原理的另一个应用.

定理 1.20 (Euler function)**.** 对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 定义 $\phi(n) = \#\{k \in [n] : \gcd(k,n) = 1\}$, 令

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r},$$

其中 p_i 是素数, $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则

$$\phi(n) = n\prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i}).$$

证明. 我们目的是求小于 n 且与 n 互素的整数的个数, 那么我们先考虑小于 n 且与 n 不互素的整数, 定义

$$A_i = \{k \in [n] : p_i | k\}, \quad i \in [r]$$

于是由容斥原理,

$$\phi(n) = |\bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_i}| = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i S_i,$$

其中

$$S_i = \sum_{\substack{I \subset [r], \\ |I| = i}} |A_I|,$$

注意

$$A_I = \{k \in [n] : \prod_{i\in I} p_i | k, i \in I\}$$

于是

$$|A_I| = \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i},$$

$$\phi(n) = n + \sum_{i=1}^{r} (-1)^i \sum_{I\subset[r],|I|=i} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i} = n\left(1 + \sum_{I\subset[r],I\neq\varnothing} \frac{(-1)^{|I|}}{\prod_{i\in I} p_i}\right) = n\prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i}). \qquad \square$$

命题 1.21. 设 $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

证明. 设 d 是 n 的一个因子, 定义

$$A_d = \{k \in [n] : \gcd(k, n) = d\},$$

任意 A_d 中的元素 k 满足 $d|k$, 且 $\gcd(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}) = 1$, 于是 k 的个数即为小于 $\frac{n}{d}$ 且与其互素的整数个数, 即

$$|A_d| = \phi(\frac{n}{d}).$$

注意到对任意 $k \in [n]$, 存在 n 的因子 d 使得 $\gcd(k, n) = d$, 即

$$[n] = \bigcup_{d|n} A_d,$$

并且上述并是不交并, 于是

$$n = \sum_{d|n} |A_d| = \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}),$$

因为 $\{d \in [n] : d|n\} = \{\frac{n}{d} : d \in [n], d|n\}$, 从而

$$n = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \phi(d). \qquad \square$$

定义 1.22 (Möbius function)**.** 设 $d \in \mathbb{Z}_+$, 定义函数

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & d \text{ 是偶数个不同素数的乘积} \\ -1 & d \text{ 是奇数个不同素数的乘积} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

命题 1.23. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

证明. $n = 1$ 时, 1 是 0 个素数的乘积, 因此求和 $= \mu(1) = 1$;

$n \geq 2$ 时, 设 $n = \prod_{i=1}^r p_i^{a_i}$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{I \subset [r], \\ |I|=k}} \mu(\prod_{i \in I} p_i) = \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k = (1-1)^r = 0.$$

□

定理 1.24 (Möbius inversion formula)**.** 设 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是两个函数且满足

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

则

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}).$$

证明.

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{r|\frac{n}{d}} g(r) \\ &= \sum_{rd|n} \mu(d) g(r) \\ &= \sum_{r|n} g(r) \sum_{d|\frac{n}{r}} \mu(d) \\ &= \sum_{r|n} g(r) \delta_n^r = g(n). \end{aligned}$$

□

Möbius 反演公式可以用来证明 *Euler* 函数的表达式 (定理 1.20).

证明. (定理 1.20 的另一种证明) 由命题 1.21 ,

$$n = \sum_{d|n} \phi(d),$$

设 $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$, 其中 p_i 是素数, 于是由 Möbius 反演公式得

$$\begin{aligned}\phi(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \\ &= n\left(1 + \sum_{I\subset[r], I\neq\varnothing} \frac{(-1)^{|I|}}{\prod_{i\in I} p_i}\right) \\ &= n\prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i}).\end{aligned}$$

□

错排问题

容斥原理也可以应用于错排问题 (derangement problem).

例 3. 考虑集合 $[n]$ 上的置换 $\pi : [n] \to [n]$, 我们称 $i \in [n]$ 是 π 的不动点, 如果 $\pi(i) = i$. 我们想知道 $[n]$ 上不存在不动点的置换的个数 $D(n)$ 是多少.

定义 $[n]$ 上所有置换构成的集合为 S_n, 设 $i \in [n]$, 令

$$A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\},$$

则

$$D(n) = |S_n| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|,$$

由容斥原理

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I\subset[n], |I|=k} |A_I|,$$

注意到 $|A_i| = (n-1)!$, 并且设 $I \subset [n]$, 则 $A_I = \bigcap_{i\in I} A_i$ 表示具有不动点 $[n] \setminus I$ 的置换构成的集合, 于是

$$|A_I| = (n - |I|)!,$$

从而

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!},$$

$$D(n) = n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} = n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right),$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-x}\Big|_{x=1} = e^{-1},$$

从而当 n 足够大时，

$$D(n) \approx \frac{n!}{e},$$

S_n 中出现不存在不动点的置换的概率为 $D(n)/n! \approx e^{-1}$.

2 Lecture 2: Generating function

2.1 生成函数 (generating function)

定义 2.1. 对无穷序列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 的常规生成函数定义为幂级数

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

注意

1. 当幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 收敛时, 我们可以将 $f(x)$ 看成是 x 的函数，并且可以对 f 进行求导以及积分运算, 例如
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

2. 当不确定幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 是否收敛时, 我们可以将生成函数看成是级数, 并且可以进行加法和乘法运算, 例如令 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, 且 $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, 定义
$$f(x) + g(x) = f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i,$$
以及
$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$
其中
$$c_i = \sum_{\substack{j+k=n \\ i,j \geq 0}} a_i b_j.$$

例 4. 令 A_n 是长度为 n 的字符串构成的集合, 并且每一个位置填入 $\{a, b, c\}$ 中的一个, 要求不出现 “a, a” , 求 $a_n = |A_n|$.

例如 $n = 1$ 时，$A_n = \{a, b, c\}$，$a_n = 3$; $n = 2$ 时，$A_n = \{ab, ba, ac, ca, bc, cb, bb, cc\}$, $a_n = 8$.

对于一般情况, 我们注意到以下的递推关系, 对于长度为 n 的字符串, 第一个字母有两种情况: 情况 1, 为 a, 那么随后第二个字母只能是 b 或 c, 剩下长度为 $n-2$ 的字符串; 情

况 *2:* 为 b 或 c, 剩下长度为 $n-1$ 的字符串. 令 $a_0 = 1$, 我们有

$$a_n = 2a_{n-2} + 2a_{n-1}, \quad \forall n \geq 2,$$

我们接下来用生成函数法求 a_n. 定义生成函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i,$$

则

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + 3x + \sum_{i=2}^{\infty}(2a_{i-2} + 2a_{i-1})x^i \\
&= 1 + 3x + \sum_{i=2}^{\infty} 2a_{i-2}x^i + \sum_{i=2}^{\infty} 2a_{i-1}x^i \\
&= 1 + 3x + 2x^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + 2x \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \\
&= 1 + 3x + 2x^2 f^2(x) + 2x(f(x) - 1).
\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1+x}{1-2x-2x^2} &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{3}+2x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{-1+\sqrt{3}-2x} \\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{-2}{1+\sqrt{3}}x} + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{-1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{2}{-1+\sqrt{3}}x}
\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i,$$

从而

$$a_n = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{3}} \left(\frac{-2}{1-\sqrt{3}}\right)^n + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{-1+\sqrt{3}} \left(\frac{2}{-1+\sqrt{3}}\right)^n.$$

定义 2.2. 对任意 $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, 定义

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

定理 2.3 (Newton's Binomial Theorem). 对任意 $r \in \mathbb{R}$, $x \in (-1,1)$,

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k.$$

例 5 (Random Walk). 定义从 1 出发的随机游走

$$S_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

其中 X_i 是相互独立的随机变量, 并且

$$\mathbb{P}(X_i = 2) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

定义,

$$\Omega = \{(X_1, X_2, \cdots) \in \{2, -1\}^{\infty}\}$$

记 $A \subset \Omega$ 为随机游走在某个时刻经过原点这一事件, 即

$$A = \{\text{存在 } n \text{ 使得 } S_n = 0\},$$

我们来求 $\mathbb{P}(A)$.

令 A_i 是从 1 出发经过 i 步第一次抵达 0 这一事件, 即

$$A_i = \{(X_1, X_2, \cdots, X_i) : S_i = 0, S_k \neq 0, \forall k < i\},$$

注意到 $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, 且

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

定义

$$a_i = \# A_i,$$

则

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{a_i}{2^i},$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = f(\frac{1}{2}),$$

其中

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^i.$$

记 b_i 是从 2 出发经过 i 步第一次抵达 0 的走法总数, 记 c_i 是从 3 出发经过 i 步第一次抵达 0 的走法总数. 注意到从 2 出发经过 i 步第一次抵达 0 可以分解为两个步骤, 先从 2 出发经过 j 步第一次到达 1, 再从 1 出发经过 $i-j$ 步第一次到达 0, 这两个事件分别等价于 A_j 和 A_{i-j}, 于是我们有

$$b_i=\sum_{j=1}^{i-1}\#A_j\cdot\#A_{i-j}=\sum_{j=1}^{i-1}a_ja_{i-j},$$

同样的

$$c_i=\sum_{j=1}^{i-1}a_jb_{i-j},$$

于是我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_ix^i=(\sum_{j=1}^{\infty}a_jx^j)^2=f^2(x),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_ix^i=(\sum_{j=1}^{\infty}a_jx^j)\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k)=f^3(x).$$

注意到 $a_1=1$, 当 $i\geq 2$ 时, $a_i=c_{i-1}$, 这是因为第一次移动如果向左边 (-1), 就已经抵达 0, 如果向右边 $(+2)$ 则到达 3, 于是从 1 出发经过 $i\,(i\geq 2)$ 步第一次抵达 0, 等价于从 3 出发经过 $i-1$ 步第一次抵达 0.

于是

$$f(x)=x+\sum_{i=2}^{\infty}a_ix^i=x+\sum_{i=2}^{\infty}c_{i-1}x^i=x+x\sum_{i=2}^{\infty}c_{i-1}x^{i-1}=x+x\sum_{i=1}^{\infty}c_ix^i=x+xf^3(x),$$

代入 $x=\dfrac{1}{2}$ 得

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f^3(\frac{1}{2}),$$

解方程得

$$f(\frac{1}{2})=1,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

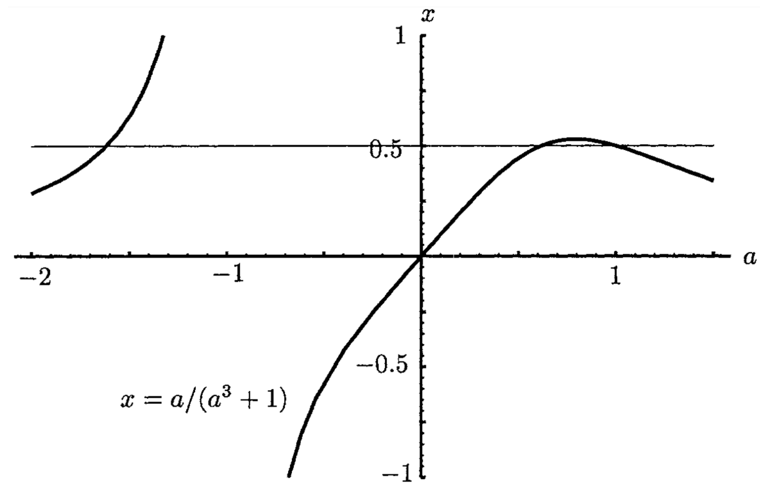


图 1: $x = f/(f^3+1)$ 的图像 [MN08]

首先舍去 $f(\frac{1}{2}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 同时 $f(\frac{1}{2})$ 不能取 1, 这是因为 $f(\frac{1}{2})$ 收敛, 并且 $a_i \geq 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上连续, 且单调非减.

如果 $f(\frac{1}{2}) = 1$, 那么从图 1 可以看出,$f(x)$ 会在 $x = \frac{1}{2}$ 的邻域内单调非增, 矛盾!

2.2 指数生成函数

定义 2.4. 对无穷序列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 的指数生成函数定义为幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

例 6. 令 S_n 为从 $\{a, b, c\}$ 中选择 n 个字母使得 a 和 b 的个数都是偶数的选法个数, 我们有

$$S_n = \sum_{\substack{x_1+x_2+x_3=n, \\ x_1, x_2 \in \{0,2,4,\cdots\}, \\ a_3 \geq 0}} 1$$

注意到

$$S_n = [x^n]f(x),$$

其中

$$f(x) = \Big(\sum_{i\in\{0,2,4,6,\cdots\}} x^i \Big)^2 (\sum_{i\geq 0} x^i).$$

例 7. 令 T_n 为从 $\{a,b,c\}$ 中选择 n 个字母进行排列, 并使得 a 和 b 的个数都是偶数的选法个数, 我们有

$$T_n = \sum_{\substack{x_1+x_2+x_3=n,\\ x_1,x_2\in\{0,2,4,6,\cdots\},\\ x_3\geq 0}} \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}.$$

令

$$g(x) = \left(\sum_{i\in\{0,2,4,6,\cdots\}} \frac{x^i}{i!}\right)^2 \left(\sum_{i\geq 0} \frac{x^i}{i!}\right),$$

则

$$[x^n]g(x) = \frac{T_n}{n!}.$$

而

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 e^x \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3^i+2+(-1)^i}{4}\right)\frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

从而

$$T_n = \frac{3^n+2+(-1)^n}{4}.$$

注: 常规生成函数通常用来计算某种组合对象的选择个数, 而指数生成函数通常用来计算某种组合对象的排列个数或者是包含序关系 (ordering) 的组合对象的个数.

命题 2.5. 我们总结一下多项式乘积的系数计算

1. 设 $f(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x)$, 其中 $f_j(x)$ 是多项式, 则

$$[x^k]f = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=k,\\ i_j\geq 0}} \prod_{j=1}^n [x^{i_j}]f_j$$

2. 设 $f(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x)$, 如果 f_j 是指数生成函数, 即

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^{(j)}x^k}{k!},$$

则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\frac{x^k}{k!},$$

其中

$$A_k=\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=k,\\ i_j\geq 0}}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\left(\prod_{j=1}^{n}[x^{i_j}]f_j\right).$$

最后我们来介绍 *Lagrange* 反演公式.

定理 2.6 (Lagrange inversion formula)**.** 令 $z=f(w)$ 在 $w=a$ 处解析, 并且 $f'(a)\neq 0$, 于是我们可以求出 $w=g(z)$ 由幂级数给出的表达形式,

$$g(z)=a+\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{(z-f(a))^k}{k!},$$

其中

$$g_k=\lim_{w\to a}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}w^{k-1}}\left[\left(\frac{w-a}{f(w)-f(a)}\right)^k\right],$$

并且 $g(z)$ 具有非负的收敛半径.

例 8. 例如考察一元五次方程

$$x^5-x-a=0,$$

令 $f(x)=x^5-x$, 于是 $a=f(x)$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处解析, 并且 $f'(0)\neq 0$, 由 *Lagrange* 反演公式,

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{a^k}{k!},$$

其中

$$g_k=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left(\frac{x}{x^5-x}\right)^k=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\frac{1}{(x^4-1)^k}=\begin{cases}-\binom{5m}{m}(4m)! & k=4m+1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$x=-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{5k}{k}\frac{a^{4k+1}}{4k+1}.$$

3 Lecture 3: Double counting

3.1 Double counting

命题 3.1. 假如我们有两个有限集 A, B, 设集合

$$S \subset A \times B,$$

如果 $(a, b) \in S$, 我们称 a 和 b 相邻 *(incident)*. 设 $a \in A$, 定义

$$N_a = \#\{b \in B : (a, b) \in S\},$$

同样的对任意 $b \in S$, 定义

$$N^b = \#\{a \in A : (a, b) \in S\}.$$

于是我们有

$$\sum_{a \in A} N_a = |S| = \sum_{b \in B} N^b.$$

定理 3.2. 定义第 n 个调和数为

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

定义 T_j 是整数 j 的因子个数, 即

$$T_j = \#\{k \in [j] : k \mid j\},$$

定义

$$\overline{T_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T_j,$$

则

$$|H_n - \overline{T_n}| < 1.$$

证明. 定义无穷数组 (x_{ij}), 其中

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i \mid j \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

例如

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

首先上述矩阵是上三角的, 并且注意到

$$\sum_{i=1}^{j} x_{ij} = T_j,$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} T_j = n\overline{T_n}.$$

再用另一种方式计数,

$$\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = \lfloor \frac{n}{i} \rfloor,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor.$$

两种计数方式得到的结果应该是一样的, 因此

$$n\overline{T_n} = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor,$$

注意到 $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$, 于是

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}\right) - n < n\overline{T_n} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i},$$

即

$$-1 < \overline{T_n} - H_n \le 0, \quad |\overline{T_n} - H_n| < 1. \qquad \square$$

在下面的几小节中, 我们将看到 Double counting 的广泛应用.

3.2 简单图与握手引理

定义 3.3. 称二元集合组 $G = (V, E)$ 是一个简单图, 如果其中 V 是非空集合, $E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V\}$.

(1) 称 V 是点集, E 是边集.

(2) 称 $x, y \in V$ 相邻, 如果 $\{x, y\} \in E$, 记做 $x \sim_G y$. 称边 $\{x, y\}$ 和点 x 以及点 y 相邻.

(3) 定义图 $G = (V, E)$ 中所有边的数目为 $e(G) := |E|$

(4) 定义点 $x \in V$ 的度数为与其相邻的所有边的个数, 记为 $d_G(x) := \#\{\{x, y\} \in E\}$.

(5) 定义点 $x \in V$ 的邻集为所有与其相邻的点构成的集合, 记为 $N_G(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$, 显然有

$$d_G(x) = |N_G(x)|.$$

(6) 称 $G' = (V', E')$ 是图 $G = (V, E)$ 的子图, 如果 $V' \subset V$, $E' \subset E \cap \{\{x, y\} : x, y \in V'\}$.

(7) 称 G 的子图 $G' = (V', E')$ 由 G 诱导, 如果 $E' = E \cap \{\{x, y\} : x, y \in V'\}$

(8) 称图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$ 是同构的, 如果存在双射 $f : V \to V'$, 使得 $i \sim_G j$ 当且仅当 $f(i) \sim_{G'} f(j)$.

(9) 称 G 是完全图 *(团, clique)*, 如果图 G 中任意两点都相邻, 记具有 n 个点的完全图为 K_n. 显然 $e(K_n) = \binom{n}{2}$.

(10) 图 G 的独立集为图 G 中两两互不相邻的顶点构成的集合.

(11) 图 $G = (V, E)$ 的补图为 $\overline{G} = (V, E')$, 其中 $E' = \{\{i, j\} : i, j \in V\} \setminus E$.

(12) 图 G 的度数序列是指把所有点的度数按照非减顺序排列得到的序列.

(13) 图 G 中长度为 $k-1$ 的道路 *(path)*P_k 是指子图 $v_1 v_2 \cdots v_k$, 其中 $v_i \sim_G v_{i+1}$,$i \in [k-1]$ 且对任意 $i \ne j$, $v_i \ne v_j$.

(14) 图 G 中长度为 k 的圈 *(cycle)*C_k 是指子图 $v_1v_2\cdots v_kv_1$, 其中 $v_i \sim_G v_{i+1}$, $i\in[k-1]$, $v_k \sim_G v_1$, 且对任意 $i \neq j$, $v_i \neq v_j$.

(15) 称 G 是一个平面图, 如果 G 可以画在一个平面内并且所有的边都只在其它们的端点与其他边相交.

引理 3.4 (handshaking)**.** 对任意图 $G=(V,E)$, 我们有

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = 2e(G).$$

证明. 由 Double counting 计数边的数目. 第一种直接数, 第二种计算所有边连接的点数总和再除以 2, 所有边连接的点数总和刚好等于所有点的度数总和. □

推论 3.5. 在任意图中, 奇度数点的个数一定是偶数.

3.3 Sperner's Theorem

定义 3.6. 称 $\mathcal{F}\subset 2^{[n]}$ 是一个 $[n]$ 中的独立系统 *(independent system)*, 如果对任意 $A,B\in\mathcal{F}$, 有 $A\not\subset B$ 且 $B\not\subset A$.

例如对任意固定的 $k\in[n]$, $\binom{[n]}{k}$ 是一个独立系统.

定理 3.7 (Sperner)**.** 对任意 $[n]$ 中的独立系统 $\mathcal{F}$, 我们有

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$$

定义 3.8. 定义 $[n]$ 的子集链 *(chain)* 是一列子集 $\{A_i\}_{i=1}^k\subset 2^{[n]}$, 且满足

$$A_i \subsetneq A_{i+1}, \quad i=1,2\cdots,k-1.$$

例如 $\{1\}\subset\{1,3\}\subset\{1,3,2\}$ 是 $[4]$ 的一条链.

称链 $\{A_i\}_{i=1}^k$ 是极大的, 如果在该链中无法再插入其他的 $[n]$ 的子集使其仍是一条链. 例如 $\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,3\}\subset\{1,3,2\}\subset\{1,3,2,4\}$ 是 $[4]$ 的一条极大链.

由于 $[n]$ 每一个极大链可以看做是 $[n]$ 的一个排列, 我们有

命题 3.9. 集合 $[n]$ 的极大链的个数刚好是 $n!$.

我们下面用 Double counting 给出定理 3.3 的第一个证明.

证明. (定理 3.3) 令 $\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 中的一个独立系统, 考虑满足下列条件的二元组 $(\mathcal{C}, A)$ 的个数,

1. $\mathcal{C}$ 是 $[n]$ 的一条极大链
2. $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$.

我们有

$$\sum_{\mathcal{C}\, maximal\, chain} N_{\mathcal{C}} = \#pairs(\mathcal{C}, A) = \sum_{A\in\mathcal{F}} N^A,$$

其中 $N_{\mathcal{C}} = \#\{A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}\}$, $N^A = \#\{\mathcal{C} \subset 2^{[n]} : \mathcal{C}\, maximal\, chain,\ A \in \mathcal{C}\}$.

首先注意到对任意极大链 $\mathcal{C}$, $N_{\mathcal{C}} \leq 1$, 因为对 $\mathcal{C}$ 中任意两个集合, 它们之间必定有包含关系, 因此不属于同一个独立系统. 另一方面, $N^A = |A|!(n-|A|)!$. 从而得到

$$\begin{aligned} n! = \sum_{\mathcal{C}\, maximal\, chain} 1 &\geq \sum_{\mathcal{C}\, maximal\, chain} N_{\mathcal{C}} \\ &= \sum_{A\in\mathcal{F}} N^A = \sum_{A\in\mathcal{F}} |A|!(n-|A|)! = \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{n!}{\binom{n}{|A|}} \\ &\geq \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{n!}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} = \frac{n!}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} |\mathcal{F}|. \end{aligned}$$

从而有

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

注意等号可以被取到, 如果我们构造独立系统

$$\binom{[n]}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

□

定义 3.10. 称 $[n]$ 的一条链是对称的, 如果它由大小为 $k, k+1, \cdots, n-k$ 的子集构成, 其中 $k \geq 0$.

例如当 $n = 4$ 时, $\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,4\}$ 是一条对称链, $\{1\} \subset \{1,2,4\}$ 不是一条对称链.

定理 3.11 (Symmetric chain decomposition)**.** $2^{[n]}$ 可以由不同的对称链划分.

证明. 证明 1: 归纳法. $n=1$ 时, $2^{[1]} = \varnothing \bigsqcup \{1\}$. 假设 $2^{[n]}$ 可以由不相交的对称链 $\{\mathcal{C}_k\}_{k=1}^t$ 划分, 即

$$2^{[n]} = \bigsqcup_{k=1}^{t} \mathcal{C}_k,$$

现在考虑 $2^{[n+1]}$，对于上述任意对称链

$$\mathcal{C}_k = \{P_i \subset P_{i+1} \subset \cdots \subset P_{n-i}\},$$

我们可以用它构造出两个 $[n+1]$ 中的对称链

$$\mathcal{C}'_k = \{P_{i+1} \subset P_{i+2} \subset \cdots \subset P_{n-i}\}$$

以及

$$\mathcal{C}''_k = \{P_i \subset P_i \cup \{n+1\} \subset P_{i+1} \cup \{n+1\} \subset \cdots \subset P_{n-i} \cup \{n+1\}\},$$

Claim: $\{\mathcal{C}'_k, \mathcal{C}''_k\}_{k=1}^t$ 是 $2^{[n+1]}$ 的一个划分.

证明 2: 考虑任意子集 $A \in 2^{[n]}$, 定义序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 其中

$$a_i = \begin{cases} (& i \in A \\ ) & i \notin A \end{cases}$$

首先匹配所有相邻的 (), 然后将其删除，重复上述过程. 最后只剩下类似于

$$)))(((((($$

这样的模式. 我们称 $A, B \in 2^{[n]}$ 是相同的 partial pairing, 如果最后剩下的括号是一样的. 这实际上是一种等价关系. 我们定义每一个等价类是一个对称链. □

由上述分解定理我们可以给出定理 3.3 的第二个证明.

证明. (定理 3.3) 注意每一条对称链恰好包含 $\binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 中的一个子集. 这说明 $2^{[n]}$ 的任意的对称链划分

$$2^{[n]} = \bigsqcup_{k=1}^{t} \mathcal{C}_k,$$

恰好有 $t = \binom{[n]}{\lfloor n/2 \rfloor}$. 考虑 $[n]$ 中的独立系统 $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap 2^{[n]} = \mathcal{F} \cap \bigsqcup_{k=1}^{t} \mathcal{C}_k = \bigsqcup_{k=1}^{t} (\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_k),$$

注意到

$$|\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_k| \leq 1,$$

于是

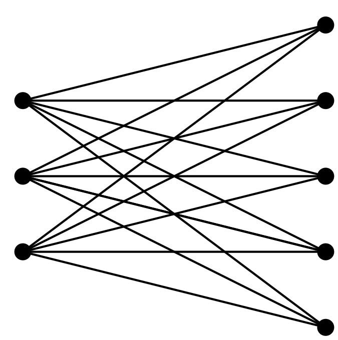
$$|\mathcal{F}| \leq t = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

□

3.4 Turán Type Problem

定义 3.12. *称图 G 是二部图 (bipartite graph), 如果 $V(G)$ 可以被划分成 A, B 两部分, 使得 G 中的每一条边恰好连接 A 中的一个点和 B 中的一个点. 称二部图 G 是完全二部图, 如果划分 A 和 B 中的任意两点都相邻, 记为 $K_{s,t}$, 其中 $s = |A|$, $t = |B|$.*

下面是一个完全二部图的例子 $(K_{3,5})$,



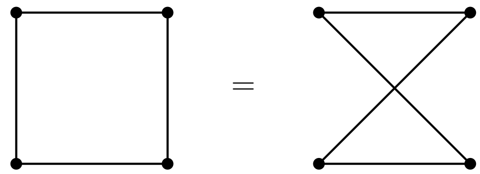
定义 3.13. *给定图 H, 称图 G 是无 H(H-free) 的, 如果 G 不包含 H 作为自己的子图.*

例如任意二部图都不包含三角形, 即为 triangle-free.

定义 3.14. *给定图 H, 定义 H 的 Turán 数为具有 n 个点的无 H 图所具有的最大边数, 记为 $\mathrm{ex}(n, H)$.*

例如设 H 是三角形, 则 $\mathrm{ex}(3, H) = 2$, $\mathrm{ex}(4, H) = 4$, $\mathrm{ex}(5, H) = 6$.

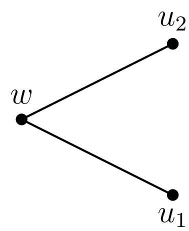
我们下面考察关于 $C_4 = K_{2,2}$ 的 Turán 数问题.



定理 3.15.

$$\mathrm{ex}(n, C_4) \leq \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3}).$$

证明. 我们称如下的图为 2-path(长度为 2 的 path),



令 G 是一个具有 n 个点的无 C_4 图, 下面证明

$$e(G) \leq \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3}).$$

下面我们对 G 中 2-path 的总个数 (#) 进行计数. 首先观察到

$$\# = \sum_{w \in V(G)} \binom{d_G(w)}{2},$$

另一方面对任意固定的二元组 $\{u_1, u_2\} \subset V(G)$, G 中最多存在一个 2-path $u_1 w u_2$ (如果存在两个,G 会包含 C_4), 因此

$$\# \leq \binom{n}{2},$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{n^2-n}{2}=\binom{n}{2} &\geq \sum_{w\in V(G)}\binom{d_G(w)}{2}\\
&= \sum_{w\in V(G)}\frac{[d_G(w)]^2-d_G(w)}{2}\\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{\sum_{w\in V(G)}[d_G(w)]^2}{n}\right)-\frac{\sum_{w\in V(G)}d_G(w)}{2}\\
&\geq \frac{n}{2}\left(\frac{\sum_{w\in V(G)}d_G(w)}{n}\right)^2--\frac{\sum_{w\in V(G)}d_G(w)}{2}\\
&= \frac{2[e(G)]^2}{n}-e(G),
\end{aligned}$$

即得到不等式

$$\frac{2[e(G)]^2}{n}-e(G)\leq\frac{n^2-n}{2},$$

解得

$$e(G)\leq\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3}).$$

□

我们可以进一步证明上面定理中等号无法取到, 即有

$$\mathrm{ex}(n,C_4)<\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3}).$$

将定理 3.15 推广可以得到

定理 3.16 (Kővári–Sós–Turán). 对于具有 n 个点的完全二部图 $K_{s,t}$, $t,s\geq 2$, 我们有

$$\mathrm{ex}(n,K_{s,t})\leq\frac{1}{2}(t-1)^{1/s}n^{2-1/s}+\frac{1}{2}(s-1)n.$$

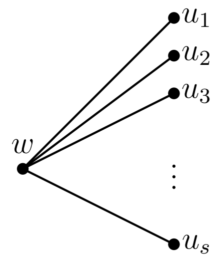
证明. 令 G 是一个无 $K_{s,t}$ 图, 并且

$$e(G)\geq\frac{1}{2}sn,$$

否则直接完成证明. 下面我们将证明

$$e(G)\leq\frac{1}{2}(t-1)^{1/s}n^{2-1/s}+\frac{1}{2}(s-1)n.$$

定义如下的图为 s-star,



接下来计数 G 中 s-star 的个数 T, 类似的, 我们有

$$T = \sum_{w \in V(G)} \binom{d_G(w)}{s},$$

且

$$T \leq (t-1)\binom{n}{s}.$$

定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < s \\ \binom{x}{s} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-s+1)}{s!} & x \geq s \end{cases}$$

可以证明 $f(x)$ 是凸函数 (convex), 于是由 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned} \frac{(t-1)\binom{n}{s}}{n} &\geq \frac{T}{n} = \frac{1}{n}\sum_{w \in V(G)} f(d_G(w)) \\ &\geq f\left(\frac{\sum_{w \in V(G)} d_G(w)}{n}\right) = f\left(\frac{2e(G)}{n}\right) \\ &\geq \frac{(d-s+1)^s}{s!}. \qquad \text{这里令 } d = \frac{\sum_{w \in V(G)} d_G(w)}{n} = \frac{2e(G)}{n} \geq s \end{aligned}$$

于是我们把问题转化为解不等式

$$\frac{(d-s+1)^s}{s!} \leq \frac{(t-1)\binom{n}{s}}{n} = \frac{(t-1)(n-1)!}{s!(n-s)!},$$

即

$$(d-s+1)^s \leq (t-1)(n-1)(n-2)\cdots(n-s+1) \leq (t-1)n^{s-1}$$

解得

$$d \le (t-1)^{1/s} n^{1-1/s} + (s-1). \qquad \square$$

3.5 Sperner 引理与 Brouwer 不动点定理

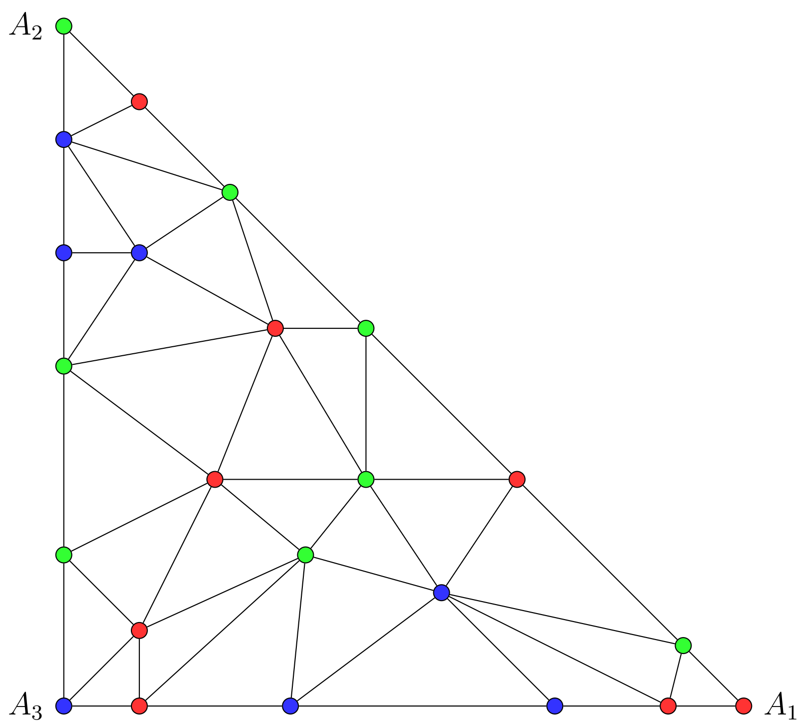
在这一部分我们来证明 Sperner 引理, 它可以用来证明拓扑中的 Brouwer 不动点定理. 这说明组合学中一些简单的性质加以应用可以得到一些意想不到的结果.

我们现在考虑一个染色游戏, 首先在平面中画出一个三角形 $\Delta = A_1A_2A_3$, 然后将其分割成若干个小三角形, 要求每一个小三角形的顶点不能在其他小三角形的边上.

接下来我们给每个小三角形的顶点进行染色, 只能染红绿蓝三种颜色, 要求

1. A_1 红色, A_2 绿色, A_3 蓝色;
2. 边 A_1A_2 上的点只能是红色或绿色, 边 A_2A_3 上的点只能是绿色或蓝色, 边 A_3A_1 上的点只能是蓝色或红色;
3. $A_1A_2A_3$ 内部的点可以是红色, 绿色或者蓝色.

例如下图就是一种符合条件的染色.



定理 3.17 (Sperner's lemma)**.** 对任意满足上述条件的染色方案, 我们总能找到三个点分别被染成红绿蓝的小三角形.

证明. 定义满足下列条件的辅助图 G,

1. 它的点对应每一个小三角形围成的面 (三角形 $A_1A_2A_3$ 的外面也定义成一个面, 其对应的 G 中的点记为 z);

2. G 中两个点是相邻的, 当且仅当它们对应的面是相邻的并且这两个面共享边的两个端点分别是红色和绿色.

考虑点 $v \in V(G) \setminus \{z\}$，我们有

1. 如果 v 对应的小三角形没有红色和绿色的端点, 则有 $d_G(v) = 0$,

2. 如果 v 对应的小三角形有一个红色和一个绿色的端点, 记 k 是第三个顶点的颜色, 如果 $k \in \{红, 绿\}$, 则 $d_G(v) = 2$, 如果 $k =$ 蓝色, 则 $d_G(v) = 1$, 并且 v 对应的三角形就是我们想找的.

注意 $d_G(v)$ 是奇数当且仅当 $d_G(v) = 1$, 当且仅当 v 对应的三角形的三个点分别被染成红绿蓝. 下面我们证明 z 的度数一定是奇数.

和 z 相邻的点对应的三角形一定有一条边在 A_1A_2 上, 并且 A_1A_2 上端点染成红色和绿色的小三角形的边一定有奇数个. 实际上，设序列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 令 $a_0 = -1$, $a_n = 1$, 对任意 $i \in [n-1]$, $a_i \in \{-1, 1\}$, 定义

$$A = \{i \in [n] : a_{i-1}a_i = -1\},$$

于是

$$[n] \setminus A = \{i \in [n] : a_{i-1}a_i = 1\},$$

我们有

$$(a_0a_1) \cdot (a_1a_2) \cdot (a_2a_3) \cdots (a_{n-1}a_n) = a_0a_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i^2 = -1,$$

另一方面

$$(a_0a_1) \cdot (a_1a_2) \cdot (a_2a_3) \cdots (a_{n-1}a_n) = \left(\prod_{i\in A} a_{i-1}a_i\right)\left(\prod_{i\in[n]\setminus A} a_{i-1}a_i\right) = \prod_{i\in A} a_{i-1}a_i = (-1)^{\#A},$$

从而 $\#A = d_G(z)$ 是奇数.

因为任意图中奇度数点的个数一定是偶数, 由于 z 是奇度数点, 那么一定存在 $v \in V(G) \setminus \{z\}$ 也是奇度数点. $\square$

接下来我们利用 Sperner's Lemma 来证明 Brouwer 不动点定理.

定理 3.18 (Brouwer's fixed-point theorem in $\mathbb{R}^2$)**.** *设 D 是平面中的一个闭圆盘, $f : D \to D$ 是连续函数, 那么一定存在 $x \in D$ 使得 $f(x) = x$.*

证明. 由于平面中的闭三角形和闭圆盘是同胚等价的, 我们考虑闭三角形的情形即可. 定义闭三角形

$$\Delta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

设 $f : \Delta \to \Delta$ 是连续映射, 对任意 $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Delta$, 设 $f(a) = (f(a)_1, f(a)_2, f(a)_3) \in \Delta$, 于是一定存在 $i \in \{1, 2, 3\}$ 使得

$$f(a)_i \leq a_i,$$

否则 $1 = f(a)_1 + f(a)_2 + f(a)_3 > a_1 + a_2 + a_3 = 1$. 注意到 Δ 三个顶点分别为

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1),$$

我们有

$$f(A)_1 \leq 1 = A_1, \quad f(B)_2 \leq B_2, \quad f(C)_3 \leq C_3,$$

并且对于边 AB 上任意点 a, 有 $a_1 + a_2 = 1$, 于是 $f(a)_1 \leq a_1$ 或 $f(a)_2 \leq a_2$, 否则 $1 = f(a)_1 + f(a)_2 + f(a)_3 > a_1 + a_2 = 1$. 在 BC 和 AC 边上也有类似的结论. 我们发现如果我们把 $f(a)_i \leq a_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ 看成是三种颜色, 那么现在刚好满足 Sperner's lemma 中的染色条件. 现在对 Δ 内部进行三角形划分, 由 Sperner's lemma 知一定存在三角形 $\Delta' \subset \Delta$, 使得其三个顶点 (A', B', C') 分别满足 $f(A')_1 \leq A'_1$,$f(B')_2 \leq B'_2$ 以及 $f(C')_3 \leq C'_3$. 当三角划分足够小时, Δ' 收缩成一个点 $P \in \Delta$, 由 f 的连续性有

$$f(P)_i \leq P_i, \ i \in \{1, 2, 3\},$$

即 $f(P) = P$. $\square$

4 Lecture 5: Pigeonhole principle

4.1 鸽巢原理

定理 4.1. 设 $\{X_i\}_{i=1}^k$ 是集合 X 的一个划分, 即

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{k} X_i,$$

如果

$$|X| \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1),$$

其中 $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则一定存在某个 X_i, 使得

$$|X_i| \geq n_i.$$

证明. 假设对任意 $i \in [k]$, 都有

$$|X_i| \leq n_i - 1,$$

则

$$|X| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| \leq \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) < 1 + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1). \qquad \square$$

例如现在有 30 个本科生聚会, 由于 30=1+(6-1)+(8-1)+(9-1)+(10-1), 于是其中至少有 6 个大一学生, 或至少有 8 个大二学生, 或至少有 9 个大三学生, 或至少有 10 个大四学生.

我们来看一个图论中的应用.

定理 4.2. 任意图中存在两个点具有相同的度数.

证明. 设图 G 中有 n 个点, 如果这 n 个点的度数都不一样, 则这 n 个点的度数分别是 $0, 1, 2, \cdots, n-1$, 如果一个点度数是 $n-1$, 说明它和其他 $n-1$ 个点都相邻, 这与存在度数为 0 的点矛盾. $\square$

定义 4.3. 图 $G = (V, E)$ 的点染色是指映射 $f : V(G) \to C$, 其中 C 是不同颜色构成的集合. 称染色是真染色 *(proper coloring)*, 如果任意两个相邻的点具有不同的颜色. 染色数 $\chi(G)$ 是指将图 G 进行真染色所需要的最少的颜色数.

注意现在没有很好的算法来计算 $\chi(G)$.

定理 4.4. 对任意图 G, 设 $\alpha(G)$ 是 G 中最大独立集中点的个数, 则

$$\chi(G)\cdot\alpha(G)\geq|V(G)|.$$

设 $S\subset[2n]$, 我们想问 S 的大小最大能有多大使得其中的元素不能相互整除.

定理 4.5. 对任意 $S\subset[2n]$, 并且 $|S|\geq n+1$, 则存在 $i,j\in S$ 使得 $i\,|\,j$.

定理 4.6. 设 $n\in\mathbb{Z}_+$, 对任意 $x\in\mathbb{R}_+$, 存在有理数 $\frac{p}{q}$, 使得 $1\leq q\leq n$, 以及

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{1}{nq}.$$

定理 4.7 (Erdős–Szekeres)**.** 对任意长为 $mn+1$ 的实数序列 $\{a_i\}_{i=0}^{mn}$, 则存在长为 $m+1$ 的非减子序列或者存在长为 $n+1$ 的非增子序列.

4.2 完全图的染色以及 Ramsey 定理

定义 4.8. 完全图 K_n 的 r-边染色是指映射 $f:E(K_n)\to\{1,2,\cdots,r\}$. 对于 2-边染色, 我们通常用蓝色和红色进行染色. 称 K_n 的子完全图是单色的, 如果它的所有边都具有相同的颜色. 对任意 $k,l\geq 2$, *Ramsey* 数 $R(k,l)$ 是最小整数 N 使得任意完全图 K_N 的 2-边染色都有一个蓝色的子完全图 K_k 或者有一个红色的子完全图 K_l.

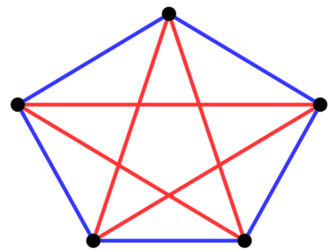
命题 4.9. (1) $R(k,l)=R(l,k)$;

(2) $R(2,l)=l$, $R(k,2)=k$

(3) $R(3,3)=6$.

证明. (1)(2) 由定义显然.(3) 注意到 $R(3,3)\leq 6$, 设 K_6 的六个点分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_6$. 对 v_1 相连的五条边进行 2-边染色, 那么至少有三条边是同一种颜色的, 不妨设 v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4 是红色的, 如果 v_2,v_3,v_4 连成的三条边有一条是红色的, 那么就可以和 v_1 围成一个红色的 K_3, 如果这三条边都是蓝色的, 那么它们自身就构成了一个蓝色的 K_3.

另一方面 $R(3,3)>5$, 比如按下图染色的 K_5 就找不到蓝色 K_3 子图或红色的 K_3 子图.



因此 $R(3,3)=6$. $\square$

定理 4.10 (Ramsey)**.** 设 $k,l\in\mathbb{Z}_+$, 则 $R(k,l)<\infty$. 实际上我们有

$$R(k,l)\le R(k-1,l)+R(k,l-1), \tag{3}$$

特别地,

$$R(k,l)\le\binom{k+l-2}{k-1}. \tag{4}$$

证明. 首先我们证明 $R(k,l)\le R(k-1,l)+R(k,l-1)$, 令 $n=R(k-1,l)+R(k,l-1)$, 下面我们想要证明 K_n 的 2-边染色中存在一个红色的 K_k 或一个蓝色的 K_l. 考虑 K_n 的一个 2-边染色, 固定 K_n 中的一个点 x, 定义

$$A=\{y\in V(K_n)\setminus\{x\}: xy\text{ blue}\},\ B=\{y\in V(K_n)\setminus\{x\}: xy\text{ red}\},$$

则 $|A|+|B|=n-1=R(k-1,l)+R(k,l-1)-1$, 由鸽巢原理, 要么 $|A|\ge R(k-1,l)$, 要么 $|B|\ge R(k,l-1)$.

Case 1: 设 $|A|\ge R(k-1,l)$, 考虑 A 上诱导出的完全图, 以及其上的 2-边染色, 由 $R(k-1,l)$ 的定义, 一定存在一个蓝色的 K_{k-1} 或者一个红色的 K_l, 如果前者成立, 我们将 x 加入 K_{k-1} 就得到了一个蓝色的 K_k, 因此 K_n 中存在一个蓝色的 K_k 或者一个红色的 K_l.

Case 2: 设 $|B|\ge R(k,l-1)$, 同上面的分析. 因此 3 成立. 下面我们对 $k+l$ 用归纳法证明 4 , 首先

$$R(1,2)=R(2,1)=1\le\binom{1}{1},$$

假设 4 对 $k+l-1$ 成立, 那么

$$R(k,l)\le R(k-1,l)+R(k,l-1)\le\binom{k+l-3}{k-2}+\binom{k+l-3}{k-1}=\binom{k+l-2}{k-1}. \qquad\square$$

定理 4.11. 如果 $R(k-1,l)$ 和 $R(k,l-1)$ 都是偶数, 那么有

$$R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1.$$

证明. 设 $n = R(k-1,l) + R(k,l-1) - 1$, 则 n 是奇数, 对 K_n 进行 2-边染色, 对任意 $x \in V(K_n)$, 定义

$$A_x = \{y \in V(K_n) \setminus \{x\} : xy \text{ blue}\},\ B_x = \{y \in V(K_n) \setminus \{x\} : xy \text{ red}\},$$

只要我们证明了 $|A_x| \geq R(k-1,l)$ 或 $|B_x| \geq R(k,l-1)$, 由定理 4.10 的证明可知我们就完成了证明. 现在设 $|A_x| \leq R(k-1,l)$ 且 $|B_x| \leq R(k,l-1) - 1$, 于是

$$n - 1 = |A_x| + |B_x| \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) - 2 = n - 1,$$

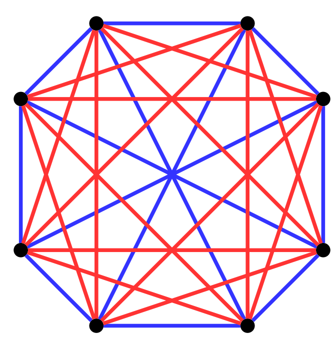
于是 $|A_x| = R(k-1,l) - 1$ 且 $|B_x| = R(k,l-1) - 1$, 且两者都为奇数. 我们只保留 K_n 的 2-边染色中为蓝色的边, 构成的新的图设为 G, 则 G 中每个点 x 的度数为 $d_G(x) = |A_x|$ 为奇数, 并且 $|V(G)| = n$, 这与奇度数点的数目一定为偶数矛盾! □

推论 4.12. $R(3,4) = 9$.

证明. 首先 $R(2,4) = 4$, $R(3,3) = 6$ 都是偶数, 从而

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) - 1 = 9,$$

另一方面 $R(3,4) > 8$, 例如下面的 K_8 两边染色就既没有蓝色的 K_3 也没有红色的 K_4,



从而 $R(3,4) = 9$. □

4.3 Hypergraph Ramsey number

定义 4.13. 设 $r \geq 3$, *r-uniform* 超图是指二元组 (V, E), 使得

$$E \subset \binom{V}{r}.$$

令 $K_n^{(r)}$ 是具有 n 个点的完全 *r-uniform* 超图, 即

$$K_n^{(r)} = (V, \binom{V}{r}),$$

其中 $|V| = n$.

5 Tree

5.1 树的定义以及基本性质

定义 5.1. 下面是树的定义

1. 称图 G 是连通的, 如果对任意 $u, v \in V(G)$, 存在一条道路连接 u 和 v.

2. 称连通的无圈图为一棵树. 树中度数为 1 的点称为叶.

命题 5.2. 设 G 是连通图, 如果 G 中存在圈 C, 则 G 去掉任意 $e \in E(C)$ 后仍然是连通图.

证明. 设 C 是连通图 G 中的圈，对任意边 $e = (u, v) \in E(C)$, 则圈 C 中存在另一条道路 uPv 连接 u, v, 对任意 $x, y \in V(G)$, 由于 G 连通，因而存在道路 xQy 将其连接, 如果 $e \in E(xQy)$, 即 $xQy = xQ_1uvQ_2y$ 或 $xQy = xQ_1vuQ_2y$, 我们可以选择另一条道路 xQ_1uPvQ_2y 或 xQ_1vPuQ_2y 将 x, y 连接, 因此去掉 e 后，G 仍然是连通图. □

命题 5.3 (Euler's formula)**.** 对任意树 $T = (V, E)$, 我们有

$$|V| = |E| + 1.$$

证明. 用归纳法证明, 当 $|V| = 1$ 时显然. 假设 $|V| = n - 1$ 时成立. 注意到任意树都至少有一片叶, 假设树中任意点的度数 ≥ 2, 取 $u, v \in V(T)$, 由连通性, 存在道路 uPv 连接 u 和 v, 而 v 度数不为 1, 因此存在与 v 相邻的点 x, 使得 $x \notin V(uPv)$, 又因为一定存在道路 xQu 连接 x 和 u, 我们有 $uPvxQu$ 构成一个圈, 矛盾! 现在设 $|V| = n$, 由于 T 中至少存在一片叶 m, 我们将点 m 去除, 剩下的图 $T' = (V', E')$ 仍然是一棵树 (连通, 无圈), 并且有 $|V'| = |V| - 1$, $|E'| = |E| - 1$, 由归纳假设 $|V'| = |E'| + 1$, 于是 $|V| = |E| + 1$. □

命题 5.4. 任意至少有两个点的树都至少有两片叶.

证明. 设树 $T = (V, E)$ 有 n 个点，则 $|E| = n - 1$, 因此

$$\sum_{v \in V} d_T(v) = 2|E| = 2n - 2,$$

由于树是连通的，因此不存在零度数的点，如果所有点度数都不为 1，那么

$$\sum_{v \in V} d_T(v) \geq 2n > 2n - 2,$$

如果只有一个点的度数为 1，那么

$$\sum_{v\in V} d_T(v) \geq 1 + 2(n-1) = 2n-1 > 2n-2,$$

矛盾! □

命题 5.5 (树的特征)**.** *设 $T=(V,E)$ 是一个图, 则下列命题等价*

(1) *T 是一棵树;*

(2) *T 是一个最小连通图, 即去掉任意一条边, 都会让 T 变得不连通;*

(3) *T 是一个最大无圈图, 即任意加上一条边, 都会引入一个圈.*

证明. (1)$\Longrightarrow$ (2) 设 T 是一棵树, 则任意两点之间有且仅有一条道路，因为如果有两条道路，会引入圈. 我们如果去掉这条道路上的一条边，都会让这两点之间不存在道路，从而让 T 不连通;

(2)$\Longrightarrow$(3) 设 T 是一个最小连通图，则 T 中不存在圈，否则，去掉圈中的某条边，仍然是连通的. 对任意不相邻的点 $u,v\in T$, 由于 T 连通，因此存在道路 uPv 连接 u,v, 如果我们给 u,v 之间再加上一条边，会使得 $uPvu$ 构成一个圈.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设 T 是一个最大无圈图, 对任意不相邻的点 $u,v\in T$, 如果引入边 uv，会构成一个圈，这说明 T 中存在道路连接 u,v, 因此 T 中任意两点之间都存在道路相连, 即 T 是连通的，因此 T 是一棵树. □

5.2 生成树与 Cayley 公式

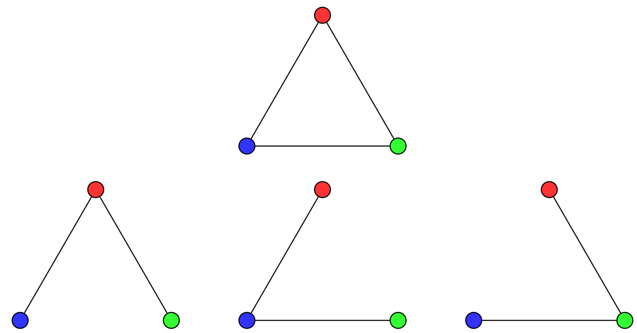
定义 5.6. *对任意图 G, 称 G 的子图 H 是生成子图 (spanning subgraph), 如果 $V(H)=V(G)$.*

命题 5.7. *图 G 连通当且仅当它有一个生成树 (spanning tree).*

证明. 设图 G 有一个生成树, 则任意两点之间都存在道路相连，因此 G 是连通的. 设 G 是连通的, 假设 G 中存在圈，由命题 5.2 我们去掉圈中的某条边，剩下的子图仍然是连通图, 重复此操作直到没有圈为止，这时得到的子图便是生成树. □

定义 5.8. *设 G 是有 n 个点的连通图, 定义 $ST(G)$ 是 G 中带标记的生成树的数目.*

例如考虑连通图 C_3



它的生成树有三个, 如下, 因此 $ST(C_3)=3$.

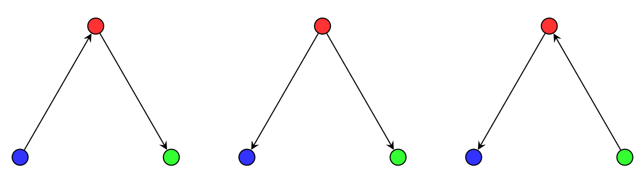
定理 5.9 (Cayley's formula)**.** 设 $n\geq 2$, 则

$$ST(K_n)=n^{n-2}.$$

证明. Double counting. 考虑 K_n 中具有 n 个顶点的有根有向树每条有向边构成的序列, 设该序列总数为 τ.

例如对于 K_3, 所有上述序列为

1. $1\to 2, 1\to 3$
2. $1\to 3, 1\to 2$
3. $2\to 1, 1\to 3$
4. $1\to 3, 2\to 1$
5. $3\to 1, 1\to 2$
6. $1\to 2, 3\to 1$
7. $\cdots$



第一种计数, 生成树的个数 $ST(K_n)$ 乘上根的选法 (n), 再乘上 $n-1$ 条有向边的排列数 $(n-1)!$, 即

$$\tau=ST(K_n)\cdot n\cdot(n-1)!$$

第二种计数, 我们分 $n-1$ 次构造上述序列, 第一个有向边的箭头尾有 n 种选法, 箭头头有 $n-1$ 种选法, 注意因为是有根有向树, 因此每个点只能接受一个箭头头, 于是第二个有向边的箭头尾有 n 种选法, 箭头头只有 $n-2$ 种选法 (去除上次的箭头头和这次箭头尾对应的点), 第 k 个有向边的箭头尾有 n 种选法, 箭头头有 $n-k$ 种选法.

$$\tau = \prod_{k=1}^{n-1} n(n-k) = n^{n-1}(n-1)!$$

从而有

$$ST(K_n) = n^{n-2}. \qquad \square$$

6 Lecture 8: System of distinct representatives

6.1 Hall 条件

定义 6.1. *我们称集合列 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 具有相异代表系统 (System of distinct representatives,SDR), 如果存一列互不相同的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 使得 $x_i \in S_i$, $i \in [m]$.*

命题 6.2. *如果集合列 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 具有 SDR, 则任意 k 个集合的并集至少有 k 个元素, 即对任意 $I \subset [m]$,*

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq |I|,$$

我们称其为 Hall 条件.

证明. 如果结论不成立, 则与 SDR 的定义矛盾. □

上述命题的逆命题也成立, 即有

定理 6.3 (Hall)**.** *集合列 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 具有 SDR 当且仅当其满足 Hall 条件.*

证明. 首先必要性已证, 我们来看充分性. 假设对 $S_1, \cdots, S_m$ 满足 Hall 条件，我们对 m 进行归纳. 当 $m=1$ 时, $|S_1| \geq 1$, 显然存在 $x_1 \in S_1$. 假设对任何 $k \leq m-1$ 结论都成立,

Case 1：假设对所有 $I \subsetneq [m]$, 我们有

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| > |I|.$$

取 $x_1 \in S_1$, 令 $S_i' = S_i \setminus \{x_1\}$, $2 \leq i \leq m$, 则对任意 $I \subset [2, 3, \cdots, m]$,

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i'\right| \geq \left|\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) \setminus \{x_i\}\right| \geq \left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| - 1 \geq |I|,$$

从而集合列 $\{S_i'\}_{i=2}^m$ 满足 Hall 条件, 由归纳假设, 集合列 $\{S_i'\}_{i=2}^m$ 具有 SDR$x_2, x_3, \cdots, x_m$, 因此 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 的 SDR.

Case 2: 假设存在 $I \subsetneq [m]$, 使得

$$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| = |I|.$$

WLOG 令 $I=[k]$, $k<m$, 考虑 $\{S_i\}_{i=1}^k$, 由归纳假设，$\{S_i\}_{i=1}^k$ 具有 SDR $x_1,x_2,\cdots,x_k$, 于是有

$$\bigcup_{i\in[k]} S_i=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}.$$

令 $S_j'=S_j\setminus\{x_1,\cdots,x_k\}$, $k<j\le m$, 注意到 $\{S_j'\}_{j=k+1}^m$ 也满足 Hall 条件, 否则存在 $J\subset\{k+1,\cdots,m\}$, 使得

$$\left|\bigcup_{j\in J} S_j'\right|<|J|,$$

则

$$\left|\bigcup_{i\in J\cup[k]} S_i\right|=\left|\left(\bigcup_{j\in J} S_j'\right)\bigsqcup\left(\bigcup_{i\in[k]} S_i\right)\right|=\left|\bigcup_{j\in J} S_j'\right|+k<|J|+k=|J\cup[k]|,$$

这与 $\{S_i'\}_{i=1}^m$ 的 Hall 条件矛盾! 于是由归纳假设, $\{S_j'\}_{j=k+1}^m$ 具有 SDR $\{x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_m\}$, 合起来即有 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 具有 SDR. □

定义 6.4. 设 $m_0\le m_1\le\cdots\le m_{n-1}$, 定义

$$F_n(m_0,m_1,\cdots,m_{n-1})=\prod_{i=0}^{n-1}(m_i-i)_*,$$

其中 $(a)_*=\max\{1,a\}$.

6.2 二部图中的匹配

定义 6.5. (1) 称图中的两条边是独立 *(或不相交的)*, 如果它们的端点是不同的.

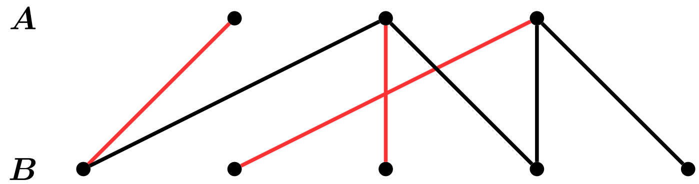
(2) 图中的一个匹配 (*matching*) 是指两两独立的边构成的集合.

(3) 对于一个二部图 $G=(A\sqcup B,E)$ 中的匹配 M, 称其为 A-匹配, 如果用到了 A 中所有的点.

(4) 设 $x\in V(G)$, 定义 x 的邻点集为 $N(x)=\{y\in G: xy\in E(G)\}$. 设 $S\subset V(G)$, 定义 S 的邻点集为 $N(S)=\{y\in G:\exists x\in S,\text{s.t. }xy\in E(G)\}$.

(5) 称 $S\subset V(G)$ 是图 G 的点覆盖 *(vertex cover)*, 如果 G 中的任意一条边, 都至少有一个端点属于 S.

例如下图红色的边就是一个二部图中的 A-匹配.



我们想问二部图 $(A \sqcup B, E)$ 满足什么条件能让每一个 A 中的元素都能找到 B 中不同的元素与其匹配，即存在 A 匹配.

命题 6.6 (Hall)**.** 对于二部图 $G = (A \sqcup B, E)$, $|A| \leq |B|$, 下列说法等价

(1) G 中存在 A-匹配

(2) 集合列 $\{N(x) : x \in A\}$ 具有 SDR

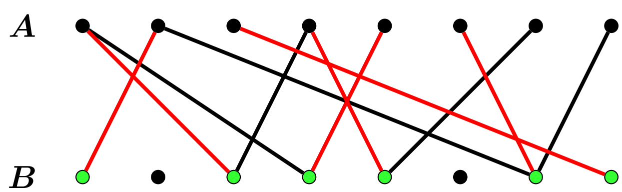
(3) 对任意 $S \subset A$, $|N(S)| \geq |S|$

证明. 我们把 A 看作是集合列, B 看作是集合列中所有元素构成的集合, 则上述定理等价于定理 6.3 . □

定理 6.7 (Kőnig)**.** 设 G 是一个二部图, 设 M 是 G 中最大的一个匹配, S 是 G 中最小的一个点覆盖, 则

$$|M| = |S|.$$

例如下面的二部图中, 红色标记的是一个最大匹配，绿色标记的是一个最小点覆盖.



7 极值组合

7.1 Erdős–Ko–Rado 定理

定义 7.1. 称 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ 是相交的, 如果对任意 $A, B \in \mathcal{F}$, 有

$$A \cap B \neq \varnothing.$$

命题 7.2. 任意相交集族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ 有

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}.$$

证明. $\{A, A^C\} \subset 2^{[n]}$ 中最多有一个集合在 $\mathcal{F}$ 中，而 $2^{[n]}$ 的集合对划分 $\{A, A^C\}$ 共有 2^{n-1} 个 (因为 $2^{[n]}$ 共有 2^n 集合, 因此 A 有 2^n 种选择, A^C 也是一样, 除去重复集合即得到 2^{n-1}), 因此 $\mathcal{F}$ 最多有 2^{n-1} 个元素. □

定理 7.3 (Erdős–Ko–Rado,1961)**.** 设 $n \geq 2k$, 最大的相交集族 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ 中的元素个数为 $\binom{n-1}{k-1}$.

7.2 Turán 定理

定义 7.4. 定义 $\mathrm{ex}(n, F) = \max\{e(G) : G$是具有 n 个点的无 F 图$\}$.

定义 7.5. 定义 *Turán* 图 $T_r(n)$ 为具有 n 个点的完全 r 部图, 并且每个部分尽可能有相同数目的点.

定理 7.6 (Turán)**.** $\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) = e(T_r(n))$.

定理 7.7. 设 G 具有 n 个点, 并且是无 K_{r+1} 的, 则

$$e(G) \leq \frac{r+1}{2r} n^2.$$

8 偏序集

8.1 偏序集与 Hasse 作图

定义 8.1. 令 X 是一个有限集, 称 R 是 X 上的二元关系, 如果 $R \subset X \times X$. 如果 $(x,y) \in R$, 我们记为 xRy.

定义 8.2. 偏序集 *(partial ordered set, poset)* 是有序对 $P = (X,R)$, 其中 R 是 X 上的二元关系，并且满足

1. 自反性: 对任意 $x \in X$, xRx;
2. 反对称性: 如果 xRy 且 yRx, 则 $x = y$;
3. 传递性: 如果 xRy 且 yRz, 则 xRz.

我们称上述二元关系为偏序关系, 通常将其记为 $\preceq$. 我们记 $x \prec y$ 如果 $x \preceq y$ 且 $x \neq y$.

例如 $(\mathbb{R}, \leq)$, $(2^X, \subset)$, $(\mathbb{Z}_+, |)$(整除) 都是偏序集.

定义 8.3. 称 X 中的元素 a,b 是可比较的, 如果其满足 $a \preceq b$ 或 $b \preceq a$, 否则称其为不可比较的. 没有不可比较元素的集合称为全序集或线性序集.

定义 8.4. 设 $(X_1, \preceq_1)$ 和 $(X_2, \preceq_2)$ 是两个偏序集, 称映射 $f: X_1 \to X_2$ 是嵌入映射, 如果

1. f 是单射
2. f 保持偏序关系, 即对任意 $x, y \in X_1$, $x \preceq_1 y$ 当且仅当 $f(x) \preceq_2 f(y)$.

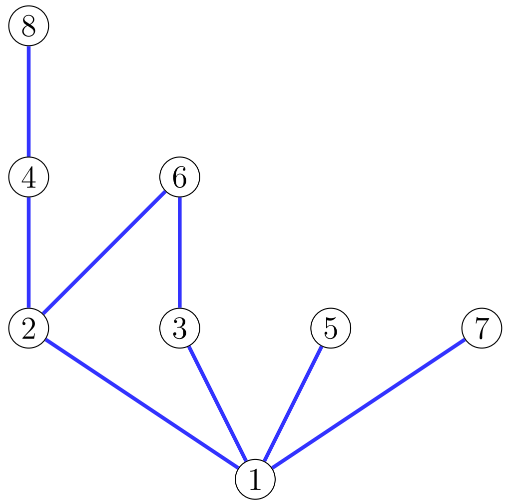
命题 8.5. 对任意偏序集 $(X, \preceq)$, 存在 $(X, \preceq)$ 到 $(2^X, \subset)$ 的嵌入映射.

证明. 考虑映射 $f: X \to 2^X$, $x \mapsto \{y \in X : y \preceq x\}$, 下面证明 f 是嵌入映射. 首先 f 是单射, 因为如果 $f(x_1) = f(x_2)$, 则由自反性 $x_1 \in f(x_1) = f(x_2)$, 因此 $x_1 \preceq x_2$, 同样的有 $x_2 \preceq x_1$, 从而 $x_1 = x_2$. 另一方面设 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \preceq x_2$, 则对任意 $y \in f(x_1)$, $y \preceq x_1 \preceq x_2$, 即 $y \in f(x_2)$, 这说明 $f(x_1) \subset f(x_2)$. 最后如果 $f(x_1) \subset f(x_2)$, 即对任意 $y \in f(x_1)$, 有 $y \in f(x_2)$, 即 $x_1 \preceq x_2$. □

定义 8.6. 设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, $x, y \in X$, 我们称 x 是 y 的直接前元 *(immediate predecessor)*, 记为 $x \lhd y$, 如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in X$ 使得 $x \prec z \prec y$.

命题 8.7. $x \prec y$ 等价于存在 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$ 使得 $x \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k \lhd y$. 当然如果 $x \lhd y$, 则上述 $k = 0$.

Hasse 作图是指将偏序集中的偏序关系按照直接前元列画出来的方式, 具体来说对于偏序集 $(X, \preceq)$, 我们把 X 中的每一个元素作为点画出来, 如果 $x \lhd y$, 则把 x 画在 y 的上面, 并在它们之间连上一条线. 例如偏序集 $([8], |)$ 的 Hasse 作图如下:



实际上 $x \prec y$ 当且仅当我们在 Hasse 作图中可以找到一条从 x 出发, 从下往上到达 y 的道路.

8.2 链, 反链以及 Dilworth 定理

定义 8.8. *设 $(X, \preceq)$ 是一个偏序集.*

(1) *称 X 中的元素 a, b 是可比较的 (comparable), 如果其满足 $a \preceq b$ 或 $b \preceq a$, 否则称其为不可比较的. 没有不可比较元素的集合称为全序集或线性序集.*

(2) *称 $A \subset X$ 是一条反链 (antichain), 如果 A 中的任意两个元素都是不可比较的. 定义*

$$\alpha(X, \preceq) = \max_{A \subset X}\{|A| : A \ \ is\ an\ antichain\}$$

(3) *称 $B \subset X$ 是一条链 (chain), 如果 B 中的任意两个元素都是可比较的. 定义*

$$\omega(X, \preceq) = \max_{B \subset X}\{|B| : B \ \ is\ a\ chain\}$$

例如在偏序集 $([8], |)$ 中 $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{3, 4, 5\}$ 都是反链, 且 $\alpha([8], |) = 4$,$\{1, 2, 4, 8\}$, $\{1, 3, 6\}$ 都是链, 且 $\omega([8], |) = 4$.

定理 8.9 (Dilworth)**.** 设 $(X, \preceq)$ 是有限的偏序集, 考虑 X 的链分解, 即存在不相交的链 $\{C_i\}_{i\in I}$ 使得

$$X = \bigsqcup_{i\in I} C_i,$$

则

$$\min|I| = \alpha(X, \preceq).$$

比如在 $([8], |)$ 中,

$$[8] = \{1, 2, 4, 8\} \cup \{3, 6\} \cup \{5\} \cup \{7\}$$

是最小的一个链分解, 且刚好 $\alpha([8], |) = 4$.

证明. 首先对任意反链 $A \subset X$, 有 $|I| \geq |A|$, 假设 $|I| < |A|$, 那么由鸽巢原理, A 中至少有两个元素在同一条链里, 这说明它们可比较, 与反链定义矛盾! 因此

$$\min|I| \geq \max|A| = \alpha(X, \preceq).$$

下面证明 $\min|I| \leq \alpha(X, \preceq)$ 即可. 我们对 $|X|$ 作归纳, $|X| = 0$ 时显然成立, 设 $|X| \geq 1$, 假设大小小于 $|X|$ 的集合 X' 都满足

$$\min|I| \leq \alpha(X', \preceq),$$

其中 $|I|$ 是 X' 任意链分解中链的个数.

记 $\alpha = \alpha(X, \preceq)$, 令 $C : x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_p$ 是 X 中最大的一条链, 即无法加入新的元素使其仍为一条链.

Case 1: $X \setminus C$ 中每一条反链中的元素个数 $\leq \alpha - 1$, 则由归纳假设有

$$X \setminus C = \bigsqcup_{i\in I'} C_i, \quad \min|I'| \leq \alpha - 1,$$

因此

$$X = \bigsqcup_{i\in I} C_i = (\bigsqcup_{i\in I'} C_i) \sqcup C, \quad \min|I| = \min|I'| + 1 \leq \alpha.$$

即结论成立.

Case 2: $X \setminus C$ 中存在一条具有 α 个元素的反链 $A = \{a_1, a_1, \cdots, a_\alpha\}$, 定义

- $X^- = \{x \in X : x \preceq a_i, \text{ for some } a_i \in A\}$

- $X^+ = \{x \in X : a_i \preceq x, \text{ for some } a_i \in A\}$

我们有

1. $X = X^- \cup X^+$. 否则存在 $x \in X$ 且 x 与 A 中的任意元素不可比较, 这样 $A \cup \{x\}$ 也是一条反链, 元素个数为 $\alpha + 1$, 这与 α 是 X 中反链元素的最大值矛盾!

2. $A = X^- \cap X^+$. 显然有 $A \subset X^- \cap X^+$, 假设 $X^- \cap X^+ \not\subset A$, 即存在 $x \in X^-$ 且 $x \in X^+$, 并且 $x \notin A$, 即存在 $a_i, a_j \in A$ 使得 $a_i \prec x \prec a_j$, 这说明 a_i 和 a_j 可比较, 与反链定义矛盾!

3. $x_p \notin X^-$. 否则存在 $a_i \in A$ 使得 $x_p \prec a_i$, 于是 $C \cup \{a_i\}$ 是 X 中的一条链, 这与 C 是最大的一条链矛盾!

由 3 知 $|X^-| < |X|$, 由于 $\alpha(X', \preceq) = |A| = \alpha$, 由归纳假设有 X^- 可以划分为 α 条链的不交并, 设

$$X^- = \bigsqcup_{i=1}^{\alpha} C_i^-,$$

且 A 中的每一个元素属于其中的一条链, 不妨设 $a_i \in C_i^-$, 并且 a_i 一定是 C_i^- 中的最大的元素, 否则设 $x \in C_i^- \subset X^-$ 使得 $a_i \prec x$, 则 $x \in X^+$ 且 $x \notin A$, 即 $x \in X^- \cap X^+ \setminus A = \varnothing$.

对 X^+ 进行同样的操作, 我们有

$$X^+ = \bigsqcup_{i=1}^{\alpha} C_i^+,$$

$a_i \in C_i^+$, 且 a_i 是 C_i^+ 中最小的元素. 因此 $C_i^- \cup C_i^+$ 也是一条链, 且 $C_i^- \cap C_i^+ = a_i$. 于是由 1,

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{\alpha} (C_i^- \cup C_i^+),$$

这说明 $\min |I| \leq \alpha$. □

以上的证明叙述参考了 Alan Frieze 的在线讲义.

8.3 Dilworth 定理的应用

下面来看 Dilworth 定理的几个应用.

定理 8.10. 对任意偏序集 $(X, \preceq)$,

$$\alpha(X, \preceq) \cdot \omega(X, \preceq) \geq |X|.$$

证明. 考虑 $(X,\preceq)$ 的最小链分解,

$$X=\bigsqcup_{i\in I}C_i,$$

由 Dilworth 定理, $|I|=\alpha(X,\preceq)$, 于是

$$|X|=\sum_{i\in I}|C_i|\le\sum_{i\in I}\omega(X,\preceq)=\alpha(X,\preceq)\cdot\omega(X,\preceq).$$ □

定理 8.11 (Erdős–Szekeres)**.** *任意长为 $mn+1$ 的实数序列 $\{a_i\}_{i=1}^{mn+1}$, 存在长为 $m+1$ 的非减子序列或者存在长为 $n+1$ 的非增子序列.*

证明. 设 $X=\{(i,a_i):i\in[nm+1]\}$, 定义 $(i,a_i)\le(j,a_j)$ 如果 $i<j$ 且 $a_i\le a_j$. 那么 $(X,\le)$ 中的一条链恰好对应一个非减子序列. 假设不存在长为 $m+1$ 的非减子序列 (自然更长的也不存在), 于是 X 的任意链分解都至少有 $n+1$ 条链, 由 Dilworth 定理, X 中存在长为 $n+1$ 的反链

$$A=\{(i,a_{i_k}):k\in[n+1],i_k\in[mn+1]\},$$

其中 $a_{i_k}>a_{i_{k+1}}, \forall k\in[n]$, 否则 A 中就存在可以比较的元素, 就不是反链. 注意到 A 刚好定义了一个长为 $n+1$ 的非增子序列. □

Dilworth 定理可以用来证明相异代表系统的 *Hall* 定理.

定理 8.12 (Hall)**.** *二部图 $G=(A\sqcup B,E)$ 存在 A-匹配, 当且仅当 Hall 条件成立, 即对任意 $S\subset A$,*

$$|N(S)|\ge|S|.$$

证明. 必要性是显然的, 我们来证明充分性. 设 G 满足 Hall 条件, 定义集合 $A\sqcup B$ 上的偏序关系, 设 $a\in A,b\in B$, 如果 $ab\in E$, 我们定义 $a\prec b$. 记 $A\sqcup B$ 最大的反链为

$$D=\{a_1,a_2,\cdots,a_k,b_1,b_2,\cdots,b_h\},$$

其中 $a_i\in A$, $b_i\in B$, 记 $s=k+h$. 显然有

$$N(\{a_i:i\in[k]\})\subset B\setminus\{b_i:i\in[h]\},$$

否则 D 就不是反链. 由 Hall 条件有

$$|B|-k\ge h,$$

即

$$|B| \geq s.$$

由 Dilworth 定理, $A \sqcup B$ 可以划分成 s 条不相交的链, 它们的组成为: 大小为 m 的匹配, $|A| - m$ 个 A 中的点, 以及 $|B| - m$ 个 B 中的点. 于是

$$s = m + (|A| - m) + (|B| - m) = |A| + |B| - m \leq |B|,$$

因此 $|A| \leq m$, 从而 $m = |A|$. $\square$

9 概率方法

定理 9.1. 设 n, s 满足

$$\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} < 1,$$

则 *Ramsey* 数

$$R(s,s) > n.$$

定义 9.2. 称集合 A 是一个无和集 *(sum-free set)*, 如果对任意 $x, y \in A$, $x + y \notin A$.

例如 $[n]$ 中所有奇数构成的集合为无和集.

定理 9.3. 设 A 是由非零整数构成的有限集, 则存在无和子集 $B \subset A$, 满足 $|B| \geq \dfrac{|A|}{3}$.

证明. 我们选择素数 p, 使得对任意 $a \in A$, $p > |a|$. 考虑集合 $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$, 以及 $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \cdots, p-1\}$, 则存在 $\mathbb{Z}_p$ 的无和子集

$$S = \{\lceil\frac{p}{3}\rceil + 1, \lceil\frac{p}{3}\rceil + 2, \cdots, \lceil\frac{2p}{3}\rceil\}.$$

Claim: 对任意 $x \in \mathbb{Z}_p^*$, $A_x = \{a \in A : ax \bmod p \in S\}$, 则 A_x 是 A 的无和子集.

接下来我们需要找到 $x \in \mathbb{Z}_p^*$ 使得 $|A_x| \geq \dfrac{|A|}{3}$. 我们在 $\mathbb{Z}_p^*$ 中随机的选取 x, 假设该选取是服从均匀分布, 下面我们来计算 $\mathbb{E}(|A_x|)$, 其中

$$|A_x| = \sum_{a\in A} \mathbb{1}_{\{ax \bmod p \in S\}},$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|A_x|) &= \mathbb{E}(\sum_{a\in A} \mathbb{1}_{\{ax \bmod p \in S\}}) \\
&= \sum_{a\in A} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{ax \bmod p \in S\}}) \\
&= \sum_{a\in A} \mathbb{P}(\{ax \bmod p \in S\})
\end{aligned}$$

注意到对选定 $a \in A$, $\{ax \bmod p : x \in \mathbb{Z}_p^*\} = \mathbb{Z}_p^*$, 从而

$$\mathbb{P}(\{ax \bmod p \in S\}) = \frac{|S|}{|\mathbb{Z}_p^*|} \geq \frac{1}{3},$$

从而

$$\mathbb{E}(|A_x|) \geq \frac{|A|}{3},$$

由于 $\mathbb{P}(|A_x| \geq \mathbb{E}(|A_x|)) > 0$, 从而存在 $|A_x|$ 使得

$$|A_x| \geq \frac{|A|}{3}. \qquad \square$$

10 代数方法

10.1 奇偶小镇

问题描述: 一个镇上有 n 个居民, 他们想要组建一些满足下列条件的俱乐部,

1. 每个俱乐部有计数个成员;
2. 任意两个俱乐部必须共享偶数个成员.

我们有下面的定理

定理 10.1. *设 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ 是一个满足下列条件的集合族,*

(1) 对任意 $A \in \mathcal{F}$, $|A|$ 是奇数;

(2) 设 $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$, 则 $|A \cap B|$ 是偶数.

我们有 $\mathcal{F} \leq n$.

证明. 对任意 $A \in \mathcal{F}$, 我们定义示性向量函数 $\mathbb{1}_A \in \{0,1\}^n$ 如下, 对任意 $i \in [n]$, 定义 $\mathbb{1}_A$ 的第 i 个分量为

$$\mathbb{1}_A(i) = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

下面证明 $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}$ 在 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ 上线性无关. 考虑

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} c_A \mathbb{1}_A = 0, \quad c_A \in \{0,1\},$$

注意到

$$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \begin{cases} |A| = 1 \bmod 2 & A = B \\ |A \cap B| = 0 \bmod 2 & A \neq B. \end{cases}$$

于是对任意 $B \in \mathcal{F}$,

$$0 = 0 \cdot \mathbb{1}_B = \sum_{A \in \mathcal{F}} c_A \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = c_B,$$

这说明 $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}$ 在 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ 上线性无关. 注意到 $\{0,1\}^n$ 中的线性无关向量最多有 n 个, 因此 $|\mathcal{F}| = |\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}| \leq n$. $\square$

类似的

定理 10.2. 设 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ 是一个满足下列条件的集合族,

(1) 对任意 $A \in \mathcal{F}$, $|A|$ 是偶数;

(2) 设 $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$, 则 $|A \cap B|$ 是奇数.

我们有 $\mathcal{F} \leq n$.

证明. 首先 $|\mathcal{F}| \leq n+1$, 这是因为我们定义

$$\mathcal{F}^* = \{A \cup \{n+1\} : A \in \mathcal{F}\} \subset 2^{[n+1]},$$

则 $\mathcal{F}^*$ 满足定理 10.1 的条件, 于是

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}^*| \leq n+1.$$

于是我们只需要证明 $|\mathcal{F}| \neq n+1$ 即可. 假设 $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$, 同样定义 $\mathbb{1}_A \in \{0,1\}^n$, 则 $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}$ 是线性相关集, 即存在不全为 0 的 $c_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq n+1$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbb{1}_{A_i} = 0,$$

注意到

$$\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{A_j} = \begin{cases} |A_i| = 0 \bmod 2 & i = j \\ |A_i \cap A_j| = 1 \bmod 2 & i \neq j \end{cases}$$

对 $1 \leq j \leq n+1$,

$$0 = 0 \cdot \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i - c_j,$$

于是对任意 $1 \leq j \leq n+1$,

$$c_j = \sum_{i=1}^{n+1} c_i,$$

是一个常数, 由于它们不全为 0, 因此有 $c_j = 1, \forall 1 \leq j \leq n+1$, 从而 $1 = n+1 \bmod 2$, 即 n 是偶数. 同时有

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{1}_{A_i} = 0.$$

下面考虑 $\mathcal{F}^c = \{A^c : A \in \mathcal{F}\}$, 可以验证 $\mathcal{F}^c$ 也满足偶奇条件, 从而

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{1}_{A_i^c} = 0.$$

将上两式相加得到

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} (\mathbb{1}_{A_i} + \mathbb{1}_{A_i^c}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{1} = (n+1)\mathbb{1},$$

即 $0 = n + 1$, 这和 n 为偶数矛盾! □

10.2 Fisher 不等式

定理 10.3. 对固定的 $k \in [n]$, 设集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ 满足对任意不相等的 $A, B \in \mathcal{F}$, 有

$$|A \cap B| = k,$$

则 $|\mathcal{F}| \leq n$.

证明. 注意对任意 $A \in \mathcal{F}$, $|A| \geq k$. 如果存在 $A \in \mathcal{F}$ 满足 $|A| = k$, 则

$$A = B_1 \cap B_2, \quad \forall B_1, B_2 \in \mathcal{F} \setminus \{A\},$$

于是 $|\mathcal{F}| \leq n - k + 1 \leq n$. 下面不妨设对任意 $A \in \mathcal{F}$, $|A| > k$. 考虑示性向量函数 $\mathbb{1}_A$, 下面证明 $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 设

$$\sum_{A \in \mathcal{F}}^{n} c_A \mathbb{1}_A = 0,$$

其中 $c_A \in \mathbb{R}$, 则

$$\begin{aligned}0 &= (\sum_{A\in\mathcal{F}}^{n} c_A \mathbb{1}_A)^2 \\ &= \sum_{A\in\mathcal{F}} c_A^2|A| + k \sum_{A,B\in\mathcal{F},A\neq B} c_A c_B \\ &= k(\sum_{A\in\mathcal{F}} c_A^2 + \sum_{A,B\in\mathcal{F},A\neq B} c_A c_B) + \sum_{A\in\mathcal{F}} c_A^2(|A|-k) \\ &= k(\sum_{A\in\mathcal{F}} c_A)^2 + \sum_{A\in\mathcal{F}} c_A^2(|A|-k).\end{aligned}$$

注意到 $k(\sum_{A\in\mathcal{F}} c_A)^2 \geq 0$,$\sum_{A\in\mathcal{F}} c_A^2(|A|-k) \geq 0$ 因此 $c_A^2(|A|-k)=0$, 由于 $|A|-k>0$, 我们有 $c_A = 0, \forall A \in \mathcal{F}$, 即 $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 从而

$$|\mathcal{F}| = |\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}| \leq n.$$

□

推论 10.4 (De Bruijn–Erdős)**.** $\mathbb{R}^2$ 中的 n 个点要么在一条直线上, 要么可以确定至少 n 条直线.

证明. 设 L 是 $\mathbb{R}^2$ 中由 $P = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 确定的所有直线构成的集合. 对任意 $i \in [n]$, 定义 L_i 是 L 中所有过 x_i 的直线构成的集合. 由于两点确定唯一一条直线, 因此

$$|L_i \cap L_i| = 1, \quad \forall i \neq j,$$

注意到存在不相等的 i, j 使得 $L_i = L_j$, 当且仅当所有点都在一条直线上. 不妨设对所有不相等的 i, j, 始终有 $L_i \neq L_j$, 令 $\mathcal{F} = \{L_i : i \in [n]\} \subset 2^L$, 由 Fisher 不等式, 我们有

$$n = |\mathcal{F}| \leq L.$$

□

10.3 距离问题

定理 10.5. 设集合 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是两距离集, 即存在 $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ 使得对任意 $x, y \in P$,

$$\|x - y\| = \delta_1 \ or \ \delta_2,$$

我们有 $|P|$ 的上界估计

$$|P| \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+4).$$

证明. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义多项式

$$f(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2-\delta_1^2)(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2-\delta_2^2),$$

那么对任意 $s,t\in P$, 有

$$f(s,t)=\begin{cases}\delta_1^2\delta_2^2 & s=t\\ 0 & s\neq t\end{cases}$$

设 $s\in P$, 定义函数

$$g_s(x)=f(x,s).$$

Claim: $\{g_s:s\in P\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

设

$$\sum_{s\in P}c_sg_s(x)=0,$$

将 $x=t\in P$ 代入上式得到

$$\sum_{s\in P}c_sg_s(t)=c_t\delta_1^2\delta_2^2=0,$$

因此 $c_t=0$, 由于 t 的任意性, 我们有 $c_t=0$, $\forall t\in P$, Claim 得证.

接下来注意到所有的 $g_s(x)$ 可以写成下列式子的线性组合

$$(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2,\ (\sum_{k=1}^{n}x_k^2)\cdot x_j,\ x_ix_j,\ x_i^2,\ 1$$

它们共有 $1+n+(n(n-1)/2+n)+n+1=(n+1)(n+4)/2$ 项, 由于 $\{g_s:s\in P\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 因此

$$|P|=|\{g_s:s\in P\}|\leq\frac{1}{2}(n+1)(n+4).$$ □

实际上可以进一步缩小 $|P|$ 的上界, 我们有

定理 10.6 (Blokhuis,1981[Blo81])**.**

$$|P|\leq\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

证明. 我们在 $\{g_s:s\in P\}$ 中继续加入 $n+1$ 个式子 $1,x_1,\cdots,x_n$, 记扩充了的集合为 G, 只

要说明 G 在 $\mathbb{R}$ 上也是线性无关的, 那么

$$|P|+n+1 \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+4),$$

即有

$$|P| \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

设

$$\sum_{s\in P} c_s g_s(x) + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i + c = 0, \tag{5}$$

设 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in P$, 在式子 5 中代入 $x=s$ 得到

$$c_s\delta_1^2\delta_2^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i s_i + c = 0 \tag{6}$$

在式子 5 中代入 $x=ae_j$, 其中 e_j 是第 j 个位置为 1 其他位置都为 0 的单位向量, 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s\in P} c_s(\sum_{k=1}^{n}(a\delta_k^j - s_k)^2 - \delta_1^2)(\sum_{k=1}^{n}(a\delta_k^j - s_k)^2 - \delta_2^2) + ad_j + c \\ &= \sum_{s\in P} c_s(a^2 - 2as_j + \|s\| - \delta_1^2)(a^2 - 2as_j + \|s\| - \delta_2^2) + ad_j + c \end{aligned}$$

由于对任意 $a\in\mathbb{R}$ 上式恒成立, 因此将其看成是关于 a 的多项式, 则每一项的系数都应该为 0, 由 a^4 和 a^3 前面的系数为 0 得

$$\sum_{s\in P} c_s = 0, \quad \sum_{s\in P} c_s s_j = 0,$$

在式子 6 中每一项乘上 c_s, 并对 s 求和得到

$$\sum_{s\in P} c_s^2\delta_1^2\delta_2^2 + \sum_{s\in P}\sum_{i=1}^{n} d_i c_s s_i + c\sum_{s\in P} c_s = 0,$$

即

$$\sum_{s\in P} c_s^2\delta_1^2\delta_2^2 = 0,$$

从而 $c_s=0, \forall s \in P$, 于是由式子 5 ,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i + c = 0, \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

因此 $c = d_i = 0, \forall i \in [n]$. □

10.4 L-相交集合族

定义 10.7. 设 $L \subset \{0, 1, \cdots, n\}$, 称 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ 是 L-相交集合族, 如果对任意不相等的 $A, B \in \mathcal{F}$,

$$|A \cap B| \in L.$$

定理 10.8. 设 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ 是一个 L 相交集合族, 则

$$|\mathcal{F}| \le \sum_{k=0}^{|L|} \binom{n}{k}.$$

10.5 Bollobás 定理

定理 10.9. 设 $\{A_i, B_i\}_{i=1}^{m} \subset \Omega$, 如果

(1) $A_i \cap B_i = \varnothing, \forall i \in [m]$,

(2) $A_i \cap B_j \neq \varnothing, \forall i \neq j \in [m]$,

则

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}} \le 1.$$

10.6 Hoffman's bound

定义 10.10. 设 $G = (V, E)$ 是具有 n 个点的简单图, 定义 G 的邻接矩阵 $A_G = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$n = \begin{cases} 1, & ij \in E(G) \\ 0. & otherwise \end{cases}.$$

显然 A_G 是对称阵, 因此 A_G 的特征值全为实数，并且 A_G 的所有特征向量相互正交.

定理 10.11. 如果图 G 是 d-正则的, 并且它的邻接矩阵具有特征值 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$, 那么

$$|S| \leq n\frac{-\mu_n}{d-\mu_n},$$

其中 S 是 G 中最大的独立集.

参考文献

[Blo81] A. Blokhuis. A new upper bound for the cardinality of 2-distance sets in euclidean space. *Eindhoven University of Technology : Dept of Mathematics : memorandum*, 8104, 1981.

[MN08] Jiri Matousek and Jaroslav Nesetril. *An Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, second edition, 2008.